Cálculo numérico I

Martes, 19/5/2015 | Examen final | Curso 2014-2015

Apellidos: ______________ ______________ **Nombre:** ______________ **Grupo:**_____

Hay que JUSTIFICAR todas las respuestas

1) (**1.5 puntos**) Se considera la ecuación $x = e^{-x}$.

a) Demostrar que tiene una única solución α y que $0 < \alpha < 1$.

b) Es fácil comprobar (es aconsejable hacer esa comprobación pero NO es necesario incluirla en la respuesta) que si w es una constante con $w \neq 0, -1$ entonces esa ecuación equivale a $x = f(x)$ donde $f(x) = \dfrac{we^{-x} + x}{1 + w}$. Hallar qué valor de w daría la convergencia más rápida posible hacia α en la iteración $x_{k+1} = f(x_k)$; ese valor de w se expresa en función de α.

2) (**2.25 puntos**) Se considera la función $f(x) = x^4 + x + 1$.

a) Encontrar $p_2(x)$, el polinomio interpolador de $f(x)$ en los puntos $-1, 0, 1$.

b) Usar la fórmula de estimación del error en interpolación para encontrar una constante C tal que $|f(x) - p_2(x)| \leq C$ en [-1,1]. ¿Es esa constante óptima?

c) Sea ahora f una función cualquiera en $[-1, 1]$ con sus tres primeras derivadas continuas. Suponiendo que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, demostrar que

$$\max_{[-1,1]} |f| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}} \max_{[-1,1]} |f'''|.$$

3) (**2.25 puntos**) Para aproximar la integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ de funciones con suficientes derivadas se considera la regla de cuadratura $I(f) = af(0) + bf'(0) + cf''(0)$.

a) Encontrar a, b, c para que sea exacta en polinomios cuadráticos.

b) ¿Hasta qué orden es exacta?

c) Suponiendo que f tiene tantas derivadas continuas como sea necesario, usar la fórmula de Taylor, con término de error, para encontrar una constante C_f, que depende de la función f, tal que $|\int_{-1}^{1} f(x)dx - I(f)| \leq C_f$.

4) (**1.5 puntos**) Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y el vector $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Encontrar una descomposición `QR` de A.

b) Usarla para encontrar la solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$.